

На правах рукописи



Ледовский Алексей Вячеславович

**Пространственный пограничный слой на плоских крыльях с изломом  
передней кромки на режиме сильного взаимодействия**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Жуковский – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном унитарном предприятии «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского» (ФГУП «ЦАГИ»)

Научный руководитель: **Дудин Георгий Николаевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГУП «Центральный аэрогидродинамический  
институт имени профессора Н.Е. Жуковского»,  
главный научный сотрудник.

Официальные оппоненты: **Исаев Сергей Александрович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
гражданской авиации (СПбГУ ГА),  
профессор кафедры механики;

**Максимов Федор Александрович**,  
доктор технических наук,  
ФГБУН «Институт автоматизации проектирования  
РАН»,  
главный научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт теоретической и  
прикладной механики им. С.А. Христиановича  
Сибирского отделения Российской академии наук  
(ИТПМ СО РАН)

Защита состоится 30 ноября 2021 года на заседании диссертационного  
совета 31.1.006.01 (Д403.004.01) при Центральном Аэрогидродинамическом  
Институте им. проф. Н.Е. Жуковского по адресу: 140180, Московская область, г.  
Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, конференц-зал инженерного корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГУП «ЦАГИ» по  
адресу: 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, а также  
на сайте ЦАГИ <http://tsagi.ru>

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2021 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д403.004.01,  
доктор физико-математических наук

М.А. Брутян

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования** определяется тем, что проведение экспериментальных исследований гиперзвуковых течений вязкого газа требует больших материальных ресурсов и сталкивается с множеством технических трудностей, которые препятствуют полному и достоверному определению аэротермодинамических характеристик течения. Поэтому важную роль играют расчетно-теоретические исследования гиперзвуковых пограничных слоев. Однако численное решение трехмерных уравнений Навье-Стокса для пространственных задач вязких сверхзвуковых течений требует огромных вычислительных ресурсов из-за необходимости высокого разрешения областей с большими градиентами при больших числах Рейнольдса. Поэтому исследования трехмерных гиперзвуковых течений вязкого газа с помощью асимптотических и численных методов для определения локальных характеристик высокоскоростных течений является в настоящее время весьма актуальной задачей.

**Степень разработанности темы** можно охарактеризовать как высокую в связи с тем, что исследования в области гиперзвуковых пограничных слоев ведутся с середины 20-го века. Для исследования этого класса течений применяются хорошо разработанные экспериментальные, теоретические и численные методы. Для теоретического изучения применяются различные асимптотические и аналитические подходы, основанные на решении полных и упрощенных уравнений Навье-Стокса. Наибольший вклад в теоретические исследования гиперзвуковых пограничных слоев был сделан в работах М.Д. Ладыженского, В.Я. Нейланда, В.В. Михайлова, В.В. Сычёва, И.И. Липатова, Г.Н. Дудина, L. Lees, R.J. Whalen, M.J. Lighthill, K. Stewartson.

**Цель работы** – изучение физических характеристик и особенностей гиперзвукового пограничного слоя на плоских крыльях с изломом и с непрямолинейной передней кромкой на режиме сильного вязкого взаимодействия с использованием теоретических и численных методов.

**Задачи, которые были решены** для достижения поставленной цели:

1. Численное моделирование обтекания тонкого полубесконечного крыла с изломом передней кромки на режиме сильного взаимодействия в цилиндрической системе координат в широком диапазоне определяющих параметров.
2. Получение асимптотических уравнений течения в плоскости симметрии и на кромках крыла с изломом передней прямолинейной кромки, определение собственных чисел задачи и решение полученных систем уравнений в разных приближениях для симметричного обтекания плоского крыла с кромками обратной стреловидности.

3. Анализ распространения возмущений в пограничном слое на крыле с изломом передней кромки в цилиндрической системе координат, определение интегрального соотношения для нахождения скоростей распространения возмущений при разных значения температурного фактора и при наличии массообмена на поверхности.
4. Изучение особенностей течения на плоском крыле с передними непрямолинейными кромками различной формы в прямоугольной декартовой системе координат.

**Научная новизна** работы состоит в том, что:

1. Получены новые данные по влиянию определяющих параметров на характер течения в пространственном пограничном слое на плоском крыле с изломом передней кромки на режиме сильного взаимодействия.
2. Впервые получены аналитические решения в виде координатных разложений для функций течения вблизи передней кромки и плоскости симметрии плоского крыла с изломом по передней кромке с использованием цилиндрической системы координат.
3. Для системы уравнений пограничного слоя в цилиндрической системе координат впервые получено интегральное соотношение, определяющее переход от закритического течения к докритическому. Построены диаграммы направленности скоростей распространения возмущений и получены новые результаты по влиянию температурного фактора и массообмена на распространение возмущений давления на крыле с изломом передней кромки.
4. Построена оригинальная математическая модель течения в пограничном слое на плоском крыле с различными формами непрямолинейной передней кромки, основанная на преобразовании координат с отображением крыла на прямоугольник и разработан метод решения уравнений модели.

**Теоретическая значимость работы** состоит в том, что установлен характер влияния различных параметров на структуру и характеристики сложных пространственных течений. Продемонстрирована значительная зависимость эффекта передачи возмущений от температурного фактора, обычно невозпроизводимого в экспериментах. Найдены аналитические решения уравнений пограничного слоя на крыле с изломом по передней кромке в цилиндрической системе координат. Получены закономерности распространения возмущений в пограничном слое на крыле с кромками обратной стреловидности. Показано влияние поверхностного вдува и отсоса на распространение возмущений.

**Практическая значимость** состоит в том, что представленные методы позволяют эффективно и быстро определять влияние определяющих параметров на характеристики течения в трехмерном гиперзвуковом пограничном слое на

режиме сильного взаимодействия. Представленные результаты могут быть полезны для интерпретации соответствующих экспериментальных данных, а также для валидации численных методов. Полученные результаты по влиянию параметров течения позволяют лучше понять физические процессы взаимодействия в гиперзвуковом пограничном слое. Результаты по исследованию распространения возмущений применимы при проектировании систем управления летательными аппаратами, а также для правильного выбора численных методов с учетом зон влияния и зависимости функций течения.

**Методология и методы исследования.** Для описания течений в гиперзвуковом пограничном слое применяется подход на основе асимптотического и численного анализа уравнений Прандтля для пограничного слоя в случае совершенного газа. Обтекание крыльев рассматривается на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия, при котором можно использовать формулу «касательного клина» для определения внешнего распределения давления. Используются известные преобразования координат и функций течения для учета особенностей поведения функций течения вблизи острых кромок и точки излома. Преобразованные уравнения решаются численно конечно-разностным методом второго порядка точности с использованием методов простой итерации, прогонки, установления, релаксации решения и метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты исследования обтекания плоского крыла с изломом передней кромки на режиме сильного взаимодействия в широком диапазоне определяющих параметров.

2. Аналитические решения в виде координатно-параметрических разложений в окрестности плоскости симметрии крыла с изломом передней кромки и вблизи передних кромок. Решение задачи на собственные числа и метод сопряжения полученных решений.

3. Интегральное соотношение для определения средних скоростей распространения возмущений индуцированного давления в пограничном слое и результаты по исследованию влияния температурного фактора и массообмена на распространение возмущений на крыле с изломом передней кромки.

4. Математическая формулировка задачи течения в пограничном слое на крыле с непрямолинейной передней кромкой и результаты её решения.

**Достоверность результатов,** полученных в диссертационной работе, обеспечивается использованием проверенных физико-математических моделей, математической обоснованностью применяемых асимптотических и численных методов анализа, проверкой сходимости численных решений по шагу расчетной сетки, сравнением численных результатов, полученных разными методами, сопоставлением с

экспериментальными данными, а также хорошим согласованием с частными случаями, полученными в работах Дудина Г.Н., Липатова И.И. и Нейланда В.Я.

**Апробация работы.** Результаты работы прошли апробацию путём обсуждения на научных конференциях и семинарах: 52, 53, 54, 55, 56 и 61-й научных конференциях МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук"; 21, 22, 23, 24 и 25-й научно-технической конференции по аэродинамике ЦАГИ в пос. Володарского; 16-й международной конференции по методам аэрофизических исследований, г. Казань, 2012 год (ICMAR-2012); 10, 11, 12 и 14-й международной школе-семинаре "Модели и методы аэродинамике" в г. Евпатория, Крым; 4-й и 5-й европейских конференциях по аэрокосмическим наукам (EUCASS) в г. Санкт-Петербург (2011 год) и в г. Мюнхен, Германия (2013 год); 19-й школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева "Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках"; конференции "Ломоносов-2020", г. Москва, МГУ. Результаты и выводы, полученные в данной работе, обсуждались на научных семинарах кафедры Теоретической и прикладной аэрогидромеханики ФАЛТ МФТИ. Основные результаты работы докладывались на видеосеминаре по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИМ МГУ в 2021 году.

Работа выполнялась в рамках научных грантов РФФИ (07-01-00349, 10-01-00173, 13-01-00202, 15-01-03615) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК № 02.740.11.0154 и ГК № 02.740.11.0203). Часть работы была поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (договор №14.G39.31.0001 от 13 февраля 2017 г.)

**Личный вклад автора:**

- анализ теоретических и экспериментальных работ по теме диссертации;
- формулировка математических моделей течения в пограничном слое на тонких крыльях переменной стреловидности в разных системах координат и построение аналитических решений на основе этих моделей;
- разработка программного модуля для решения трехмерных уравнений пограничного слоя и выполнение всех приведенных в работе расчетов;
- обработка и анализ полученных результатов, сравнение с экспериментом и с результатами других авторов.

**Соответствие паспорту специальности.** Содержание диссертации соответствует задачам, указанным в паспорте специальности 01.02.05 (1.1.9): “Задачей механики жидкости, газа и плазмы является построение и исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред в широком диапазоне условий, ...” В работе анализируются классы задач механики жидкости и газа, соответствующие областям исследований, перечисленным в паспорте специальности:

п. 3 – Ламинарные и турбулентные течения (в части "ламинарные течения");  
п. 4 – Течения сжимаемых сред и ударные волны (в части "течения сжимаемых сред");

п. 11 – Пограничные слои, слои смешения, течения в следе (в части "пограничные слои");

п. 18 – Аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.) (в части "аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений континуальных моделей однородных сред).

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 167 страниц, включая 95 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 130 наименований, включая публикации автора по теме диссертации.

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 научных публикациях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1—5], 12 — в сборниках докладов и трудов конференций и семинаров [6—17]. Список работ приведен в конце автореферата.

### Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели данной работы, описаны решенные задачи, даны основные положения, которые выносятся для защиты, отмечена их научная новизна, научная и практическая значимость, апробация и достоверность, приведено краткое содержание работы. Приведен обзор литературы по теме диссертационной работы. В обзоре рассмотрены публикации по экспериментальным, теоретическим и численным методам исследования гиперзвуковых пограничных слоев на тонких крыльях.

В **главе 1** рассмотрена задача гиперзвукового обтекания плоского полубесконечного крыла с изломом передней кромки на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия, то есть при условиях:  $M_\infty \rightarrow \infty$ ,  $M_\infty \delta \gg 1$ , где  $M_\infty$  - число Маха невозмущенного потока,  $\delta \sim Re_0^{-1/4}$  - безразмерная толщина пограничного слоя. Число Рейнольдса  $Re_0 = \rho_\infty U_\infty L / \mu_0$  предполагается достаточно

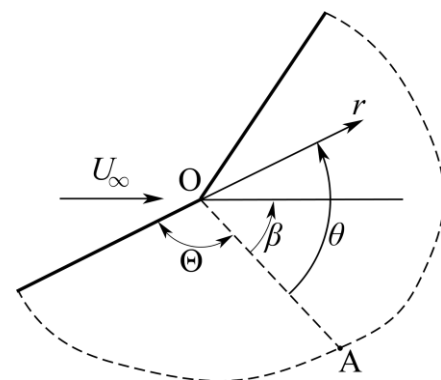


Рис. 1 – Схема крыла и система координат

большим, но не превосходящим критического значения ламинарно-турбулентного перехода. Для полубесконечного крыла сформулирована математическая постановка задачи в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, y)$ , что позволило рассмотреть пластину с изломом передней кромки и с кромками обратной стреловидности. Газ предполагается совершенным с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$ . Температура поверхности считается известной и постоянной по всей поверхности крыла. Геометрия крыла определяется углом полураствора  $\Theta$  и углом скольжения  $\beta$  (рис. 1). Угол атаки отсутствует. Задача является в общем случае несимметричной из-за наличия излома передней кромки и угла скольжения. Используется двухслойная схема течения – внешняя область течения невязкого газа, описываемая уравнениями Эйлера, и вязкий ламинарный пограничный слой, описываемый уравнениями Прандтля. Для вычисления распределения давления по крылу используется формула «касательного клина», которая имеет высокую точность при условии  $M_\infty \delta \gg 1$ . С помощью введения переменных Дородницына и преобразований для учета особенностей поведения функций вблизи острых кромок задача приведена к автомодельной.

Полученная система уравнений пограничного слоя решается конечно-разностным методом. Для аппроксимации исходных уравнений применяются конечные разности второго порядка точности с учетом направления течения. Сначала решаются уравнения на кромках крыла (безразмерная координата  $\theta = \pm 1$ ). Затем полученные профили скоростей и энтальпии используются в качестве граничных условий для двумерной задачи. Для определения индуцированного давления в процессе расчетов использовалась релаксация с помощью дифференциального уравнения второго порядка. В данном методе для определения давления на очередной итерации используются заданные и полученные значения давления во всех точках расчетной области, включая граничные. Применение этого подхода позволяет выполнять расчеты на достаточно подробных сетках с высокой скоростью.

Приводится описание разностных схем и численного метода решения уравнений пограничного слоя на режиме сильного взаимодействия. Определены условия хорошей обусловленности разностной схемы и выполнена оценка погрешности схемы. Приводится сопоставление результатов расчетов на различных сетках и определена степень влияния сеточного разрешения на полученные результаты.

С помощью численных методов изучено влияние формы крыла в плане, угла скольжения, температурного фактора, показателя адиабаты, числа Прандтля и показателя степени для коэффициента вязкости.

На крыле с изломом передней кромки обнаружена область с повышенным трением и тепловыми потоками в окрестности точки излома в направлении потока



(рис. 2). Излом передней кромки приводит к значительному локальному повышению тепловых потоков, давления и трения в окрестности точки излома и вниз по потоку. Из анализа картины линий тока на поверхности крыла можно сделать вывод, что вниз по потоку от точки излома возникает область растекания с пониженным давлением и повышенными тепловыми потоками. Форма крыла в плане существенно влияет на распределение и значение характеристик течения. При этом для крыла с кромками прямой стреловидности не наблюдается пиков трения и тепловых потоков, как в случае крыла с изломом передней кромки.

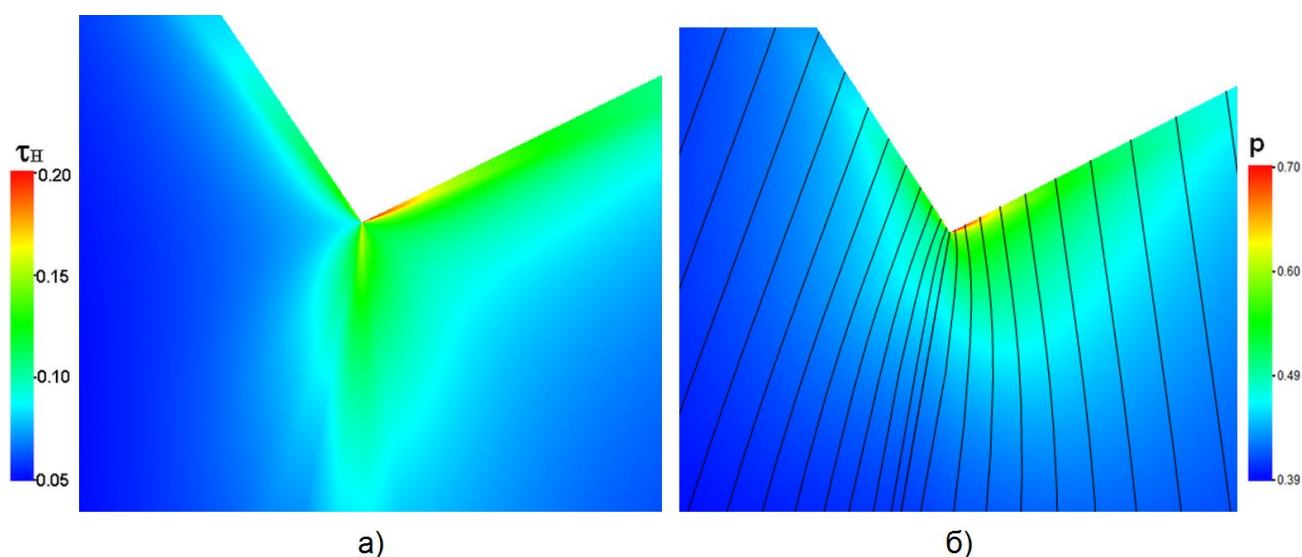


Рис. 2 – Распределение а) - тепловых потоков, б) - давления и линий тока на поверхности крыла с геометрическими параметрами:  $\Theta = 135^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$

Для исследования влияния формы крыла в плане были проведены расчеты при температурном факторе  $H_w = 0.5$  (отношение энтальпии на поверхности к энтальпии торможения), показателе адиабаты  $\gamma = 1.4$  и числе Прандтля  $Pr = 0.72$  для разных геометрических параметров крыла. На рис. 3 представлены распределения коэффициента напряжения трения по безразмерной угловой координате  $\theta$ . На крыльях с изломом передней кромки (кривые 3-5) возникают локальные области повышенного трения с максимумом в направлении набегающего потока (в области линии стекания). Тогда как на треугольных крыльях (кривые 1-2) такое не наблюдается. Коэффициент напряжения трения выше вблизи кромки с меньшей стреловидностью. Полученные распределения тепловых потоков по крылу согласуются с распределением коэффициента поверхностного трения. При этом максимум в области локального повышения тепловых потоков более выраженный, чем для трения.

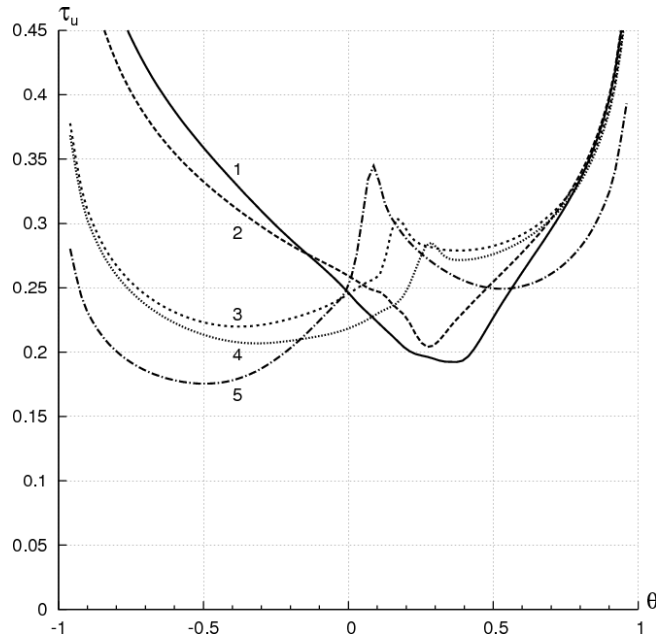


Рис. 3 – Распределение коэффициента  $\tau_u$  по угловой координате для крыла с  $H_w=0.5$  и геометрическими параметрами 1)  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ , 2)  $\Theta = 67.5^\circ$ ,  $\beta = 22.5^\circ$ , 3)  $\Theta = 112.5^\circ$ ,  $\beta = 22.5^\circ$ , 4)  $\Theta = 105^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ , 5)  $\Theta = 135^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$

Получены также результаты влияния температурного фактора  $H_w$  для крыла с параметрами  $\Theta = 105^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ . Увеличение температуры поверхности крыла от  $H_w = 0.1$  до  $H_w = 1.0$  приводит к повышению напряжения трения почти в 3 раза. При нагреве происходит незначительное смещение положения максимумов повышенного трения на 5% от угла  $\Theta$ .

В главе 2 исследован гиперзвуковой пограничный слой на плоском крыле с изломом по передней кромке при симметричном обтекании на режиме сильного взаимодействия. Форма крыла определяется углом  $\Theta$  при вершине (рис. 1). Угол скольжения  $\beta$  и угол атаки отсутствуют. После введения новых переменных для учета особенностей вблизи кромок и в точке излома, выполнены разложения функций течения в виде степенных рядов по угловой координате  $\theta$  вблизи плоскости симметрии и передних кромок. В окрестности плоскости симметрии предполагается справедливость следующих разложений для скорости, энтальпии, давления и толщины вытеснения:

$$w(\eta, \theta) = w_{10}(\eta)\theta + w_{30}(\eta)\theta^3 + O(\theta^5),$$

$$f(\eta, \theta) = f_{00} + f_{10}\theta^2 + f_{20}\theta^4 + O(\theta^6),$$

где  $\eta$  - преобразованная координата по нормали к поверхности крыла,  $f_{i0} = \{u_{i0}(\eta), H_{i0}(\eta), v_{i0}(\eta), p_{i0}, \Delta_{i0}\}$ ,  $H$  - энтальпия торможения,  $\Delta$  - толщина вытеснения. Подстановка этих разложений в систему уравнений и в краевые условия, после группировки членов одного порядка по  $\theta$ , дает несколько краевых задач, которые решаются последовательно. Для правильного задания граничных

условия на внешней границе пограничного слоя исследовано асимптотическое поведение функций течений при  $\eta \rightarrow \infty$  и получены оценки для величины скорости на верхней границе.

На рис. 4 для крыла с углом  $\Theta = 45^\circ$  показана зависимость давления  $p_{00}$  от параметра  $p_{20}$ , который является второй производной давления по поперечной координате и может быть однозначно определен из решения краевой задачи для следующих членов асимптотического разложения. Найдено четыре различных решения для значений  $p_{20}$  в диапазоне от -2 до 0, которые соответствующими цифрами обозначены на фигуре. Обрыв кривых на графиках связан с неустойчивостью решений при заданных параметрах. На рис. 4 кривая 5 ( $p_{00} = -2p_{20}$ ) соответствует изменению знака градиента давления в решаемой краевой задаче в уравнении для  $w_{10}$ .

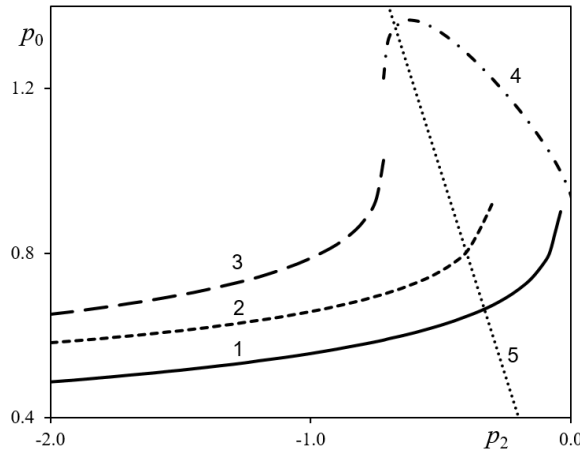


Рис. 4 – Зависимость давления  $p_{00}$  от параметра  $p_{20}$  для угла стреловидности передней кромки  $\Theta = 45^\circ$ : 1-4 - номера решений, 5 – линия  $p_{20} = -2p_{00}$

Для исследования функций течения в окрестности передних кромок вводятся другие преобразования и разложения:

$$p_e = p_0 + p_1(1-\theta) + p_2(1-\theta)^2 + p_\alpha(1-\theta)^\alpha + \sum_3^\infty p_i(1-\theta)^{\alpha_i},$$

$$f(\eta_e, \theta) = f_0(\eta_e) + f_1(\eta_e)(1-\theta) + f_2(\eta_e)(1-\theta)^2 + f_\alpha(\eta_e) \frac{p_\alpha}{p_0} (1-\theta)^\alpha + \sum_3^\infty f_i(\eta_e)(1-\theta)^{\alpha_i},$$

где  $f = (u, w, v_e, H, \Delta)$ . Индексом 0 обозначены члены разложений, которые соответствуют автомодельному решению для полубесконечного крыла, и предполагается, что  $0 < \alpha < \alpha_i < \alpha_{i+1}$ . В результате были получены системы в четырех приближениях и задача на определение собственного числа  $\alpha$ . На рис. 5 показано изменение собственного числа в зависимости от угла стреловидности передней кромки  $\Theta$ . Максимальное значение достигается при  $\Theta = 90^\circ$ . Уменьшение температурного фактора приводит к увеличению собственного числа, что соответствует уменьшению области распространения возмущений.

Решения краевой автомодельной задачи для членов нулевого порядка получены численно с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для нахождения всех решений, число которых достигало четырех, краевая задача сводилась к задаче с начальными условиями на поверхности крыла. При этом граничные значения производных на поверхности крыла подбирались итерационно для удовлетворения условиям на внешней границе пограничного слоя. Для получения однозначного решения уравнений следующих приближений использовался конечно-разностный метод прогонки. Результаты расчетов приведены для параметров  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 1$ ,  $H_w = 1$ .

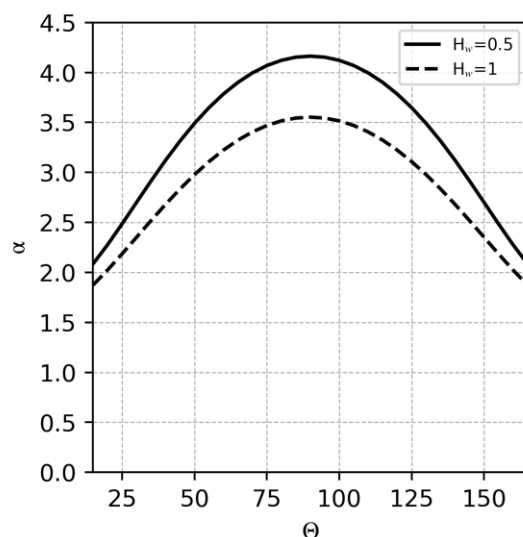


Рис. 5 – Значение собственного числа  $\alpha$  в зависимости от угла стреловидности

Для получения полного решения на всем крыле от плоскости симметрии до передней кромки выполнено сопряжение полученных решений. Для нахождения двух неизвестных параметров  $p_{20}$  – в плоскости симметрии и  $p_\alpha$  – на передней кромке, а также положение точки сопряжения решений необходимо удовлетворить условиям равенства давления и двух его первых производных. На рис. 6 показаны распределения давления  $p(\theta)$ , полученные в результате сопряжения двух решений. Для этого использовалось по три члена разложения вблизи плоскости симметрии и передней кромки. Пунктиром показано распределение давления, полученное точным решением пространственной автомодельной задачи без асимптотических разложений. Получено хорошее согласование асимптотических методов с решением полных уравнений.

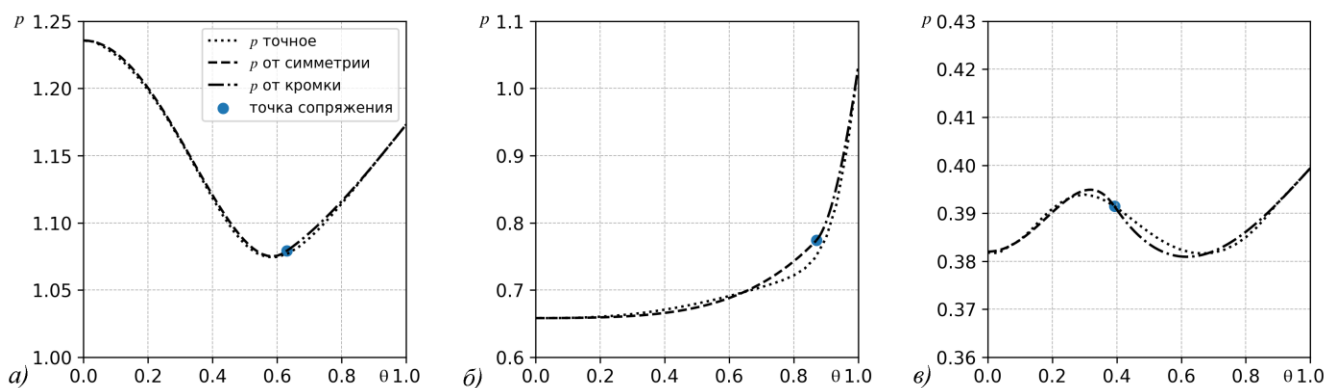


Рис. 6 – Давление  $p$  от плоскости симметрии до передней кромки при  $\Theta$  равном : а)  $45^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $135^\circ$

В главе 3 исследуется распространение возмущений в пространственном пограничном слое на плоском крыле в окрестности точки излома передней кромки с использованием цилиндрической системы координат. Введение цилиндрической системы координат позволило провести параметрические исследования влияния углов стреловидности в широком диапазоне, в том числе для крыльев с обратной стреловидностью. Массообмен на поверхности крыла задается функцией  $v(y=0) = U_\infty F_w(r, \theta)$ , где  $U_\infty$  - скорость набегающего потока, а  $F_w(r, \theta) \sim O(\delta)$ , что соответствует нормальной компоненте скорости в пограничном слое при отсутствии массообмена. Конкретный вид функции  $F_w(r, \theta)$  в дальнейшем выбирается из условия возможности сведения пространственной задачи к автомодельной по продольной координате. Для того, чтобы скорость вдува газа в краевой задаче в безразмерных переменных не зависела от температуры поверхности пластины  $T_w$ , предполагается, что скорость вдува линейно зависит от температурного фактора  $H_w$ . Распределение индуцированного давления определяется по формуле «касательного клина», обобщенной на нестационарный случай. Определена зависящая от времени  $t$  характеристическая поверхность  $f(r, \theta, t) = 0$ , которая является поверхностью слабого разрыва, т.е. производная от функции давления по нормали к этой поверхности  $\partial p / \partial f$  не определена, при этом сама функция давления непрерывна. С помощью введения скорости перемещения характеристической поверхности в виде  $a \square \partial f / \partial t$  в работе получено интегральное соотношение:

$$\frac{\gamma - 1}{2} \int_0^\infty \frac{(H - u^2 - w^2)^2}{(a - u \cos(\omega - \Theta\theta + \beta) - w \sin(\omega - \Theta\theta + \beta))^2} d\eta - \int_0^\infty (H - u^2 - w^2) d\eta = 0.$$

Здесь  $\omega$  - угол между рассматриваемым направлением распространения возмущений и направлением невозмущенного потока. Соотношение позволяет определить среднюю скорость распространения возмущений, если известны профили скорости и энтальпии. Таким образом, если поверхность  $f(r, \theta, t) = 0$  существует, то она делит течение на области, в которых возмущения соответственно могут и не могут двигаться вверх по течению.

Для определения скорости распространения возмущений необходимо знать профили скорости и энтальпии в пограничном слое. Эти профили были определены путем численного решения пространственных уравнений пограничного слоя. Получены автомодельные решения уравнений для  $\Theta = 45^\circ$  и  $135^\circ$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.72$ , при различных значениях температурного фактора  $H_w$  и скорости массообмена через поверхность.

На рис. 7 представлено влияние температурного фактора  $H_w$  на скорость распространения возмущений вверх по потоку ( $\omega=180^\circ$ ) в плоскости симметрии ( $\theta=0$ ) при симметричном обтекании плоских крыльев с углами  $\Theta$  равными  $45^\circ$  и  $135^\circ$ . Увеличение  $H_w$  от 0.1 до 0.9 приводит к росту скорости распространения возмущений вверх по потоку на порядок. Это связано с тем, что нагрев обтекаемой поверхности существенно увеличивает толщину пограничного слоя и, соответственно, растет дозвуковая область течения, по которой передаются возмущения.

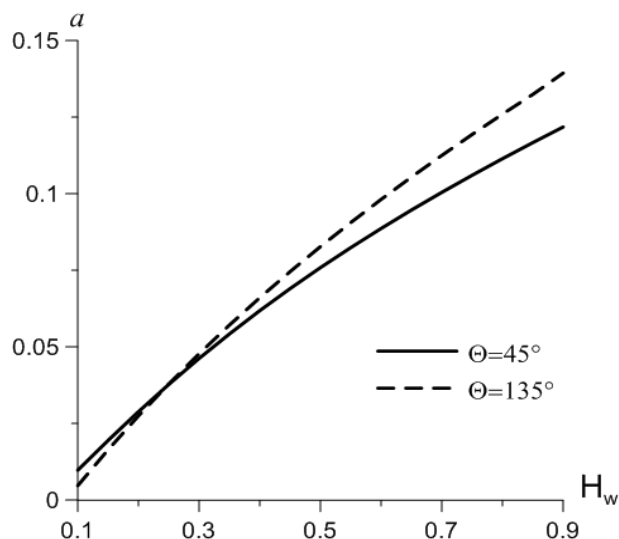


Рис. 7 – Влияние температурного фактора на скорость возмущений вверх по потоку.

На рис. 8 приведены диаграммы направленности скорости распространения возмущений в плоскости симметрии при разных температурных факторах: 0.05, 0.3, 0.6, 0.9. Диаграммы показывают, с какой скоростью в различных направлениях будут распространяться возмущения от точки, в которую они были внесены. Направление по потоку соответствует направлению  $0^\circ$ , против потока — направлению  $180^\circ$ . Увеличение температурного фактора приводит к значительному увеличению скорости распространения возмущений вверх по течению, при этом скорость вниз по потоку изменяется незначительно. Вблизи передней кромки характерно увеличение скорости в направлении точки излома при нагреве поверхности крыла. Также стоит отметить, что при малых значениях температурного фактора ( $H_w < 0.1$ ) наблюдается излом в диаграмме со стороны набегающего потока, что связано с фактическим «запиранием» распространения возмущений в данном направлении при обтекании холодного крыла.

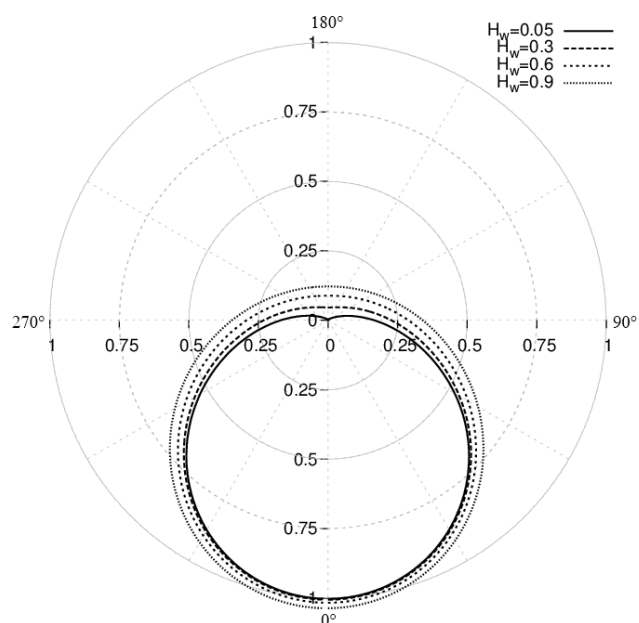


Рис. 8 – Диаграммы направленности в плоскости симметрии на треугольном крыле

На рис. 9 показано влияние массообмена на скорость распространения возмущений против потока в плоскости симметрии треугольного крыла ( $\Theta = 45^\circ$ ) и крыла с изломом передней кромки ( $\Theta = 105^\circ$ ,  $\beta=35^\circ$ ) при значениях температурного фактора 0.1, 0.5, 0.9. Положительная скорость массообмена

соответствует вдуву воздуха с температурой поверхности крыла. Отсос газа приводит к почти линейному уменьшению скорости  $a$ . При увеличении скорости вдува начинает развиваться область невязкого течения вблизи поверхности крыла, что ведет к неприменимости уравнений пограничного слоя в этих случаях. Такая сильная зависимость скорости распространения возмущений от скорости массообмена  $V_w$  связана с изменением толщины зоны дозвукового течения вблизи поверхности.

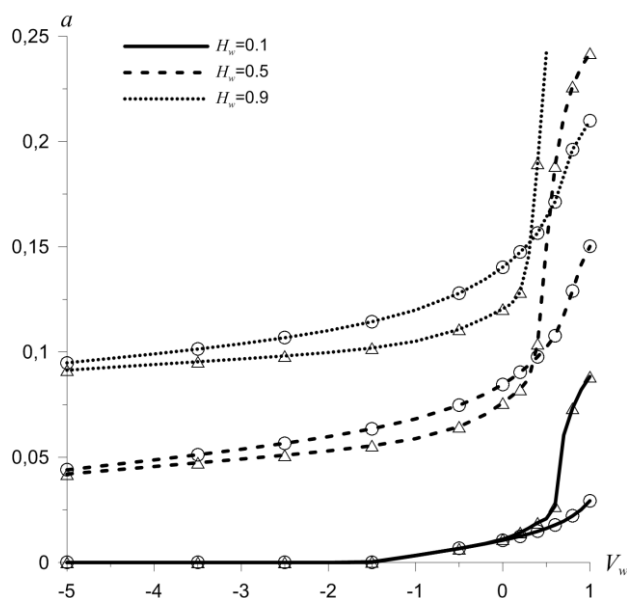


Рис. 9 – Влияние скорости вдува на распространение возмущений против потока на крыле с параметрами  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\beta=0$  ( $\Delta$ ) и с  $\Theta = 105^\circ$ ,  $\beta=35^\circ$  ( $\circ$ )

На рис. 10 приведены диаграммы направленности скорости распространения возмущений при разных значениях  $V_w$  в плоскости симметрии на треугольном крыле ( $\Theta = 45^\circ$ ) при температурном факторе  $H_w = 0.5$ . Увеличение скорости  $V_w$  приводит к довольно значительному увеличению скорости распространения возмущений вверх по течению, при этом скорость вниз по потоку меняется незначительно. Значения скорости  $a$  против потока (см. рис. 9) соответствуют точкам пересечения с вертикальной линией. Также стоит отметить, что при значении скорости отсоса  $V_w = -4$  наблюдается излом в диаграмме со стороны набегающего потока, что связано с фактическим «запиранием» распространения возмущений в данном направлении при обтекании холодного крыла.

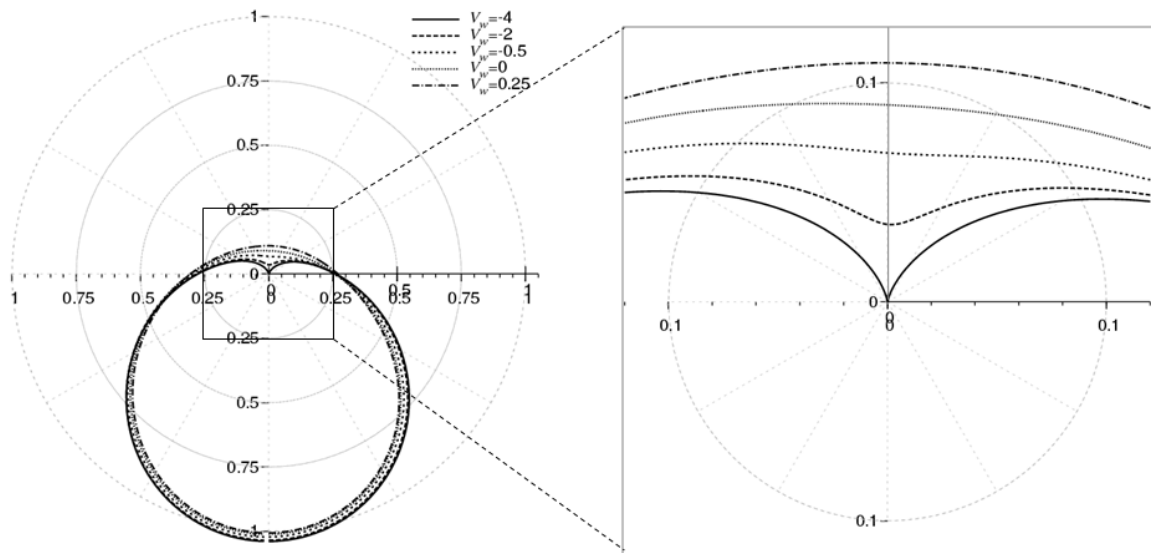


Рис. 10 – Диаграммы направленности скорости распространения возмущений в плоскости симметрии треугольного крыла ( $\Theta = 45^\circ$ ,  $\beta=0$ ).

В главе 4 рассмотрена задача симметричного обтекания плоского крыла с передними кромками переменной стреловидности. Угол атаки предполагается нулевым. Форма крыла в плане задается функцией  $z_e(x)$  (рис. 11). В качестве характерного поперечного размера берется полуширина задней кромки  $z_0$ . В дополнение к вводимым в предыдущих главах преобразованиям поперечная координата  $z$  преобразовывается по формуле  $z=z_e(x)t$ . Такая замена позволяет произвести отображение плоскости крыла на прямоугольник, что существенно упрощает задание расчетной сетки. В рассматриваемом случае из-за нелинейности формы передней кромки задача остается трехмерной.

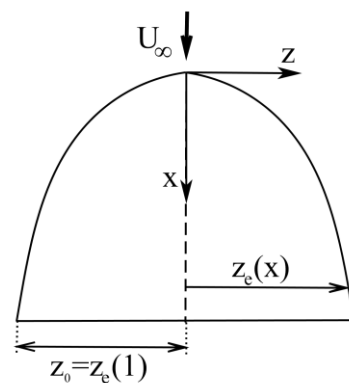


Рис. 11 – Схема крыла и система координат

Для численного решения трехмерной задачи использовался конечно-разностный метод. Для релаксации давления в процессе расчетов применялось дифференциальное уравнение второго порядка.

Получены распределения функций течения на крыльях с передними кромками, которые задаются функциями  $z_e = \ln(1+x)$  и  $z_e = x/2 \cdot \exp(x)$ . Исследовано влияние формы кромки и температурного фактора на распределение давления, напряжения трения, тепловых потоков и линий тока.

На рис. 12 показано распределение давления на поверхности крыла с формой передней кромки  $z_e = x/2 \cdot \exp(x)$ . Максимальные значения достигаются на передних кромках ближе к задней кромке. При этом в плоскости симметрии вблизи вершины наблюдается локальное повышение давления, которое при приближении к задней кромке практически исчезает.



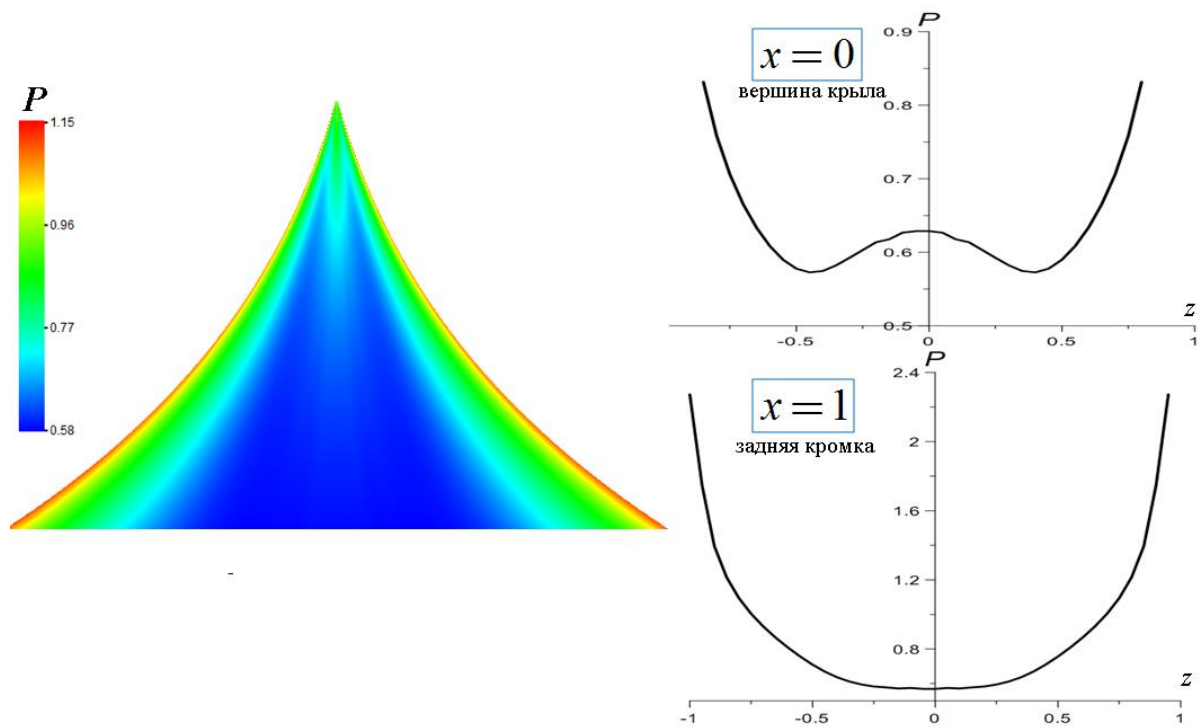


Рис. 12 – Распределение давления на поверхности крыла с  $z_e = x/2 \cdot \exp(x)$

На рис. 13 показаны распределения давления при температурных факторах 0.1 и 0.9 для крыла с кромками  $z_e = \ln(1+x)$ . Нагрев поверхности крыла приводит не только к росту давления в 3 раза, но и к более выраженному максимуму в плоскости симметрии. При этом нагрев поверхности также приводит к росту трения почти в 2.5 раза.

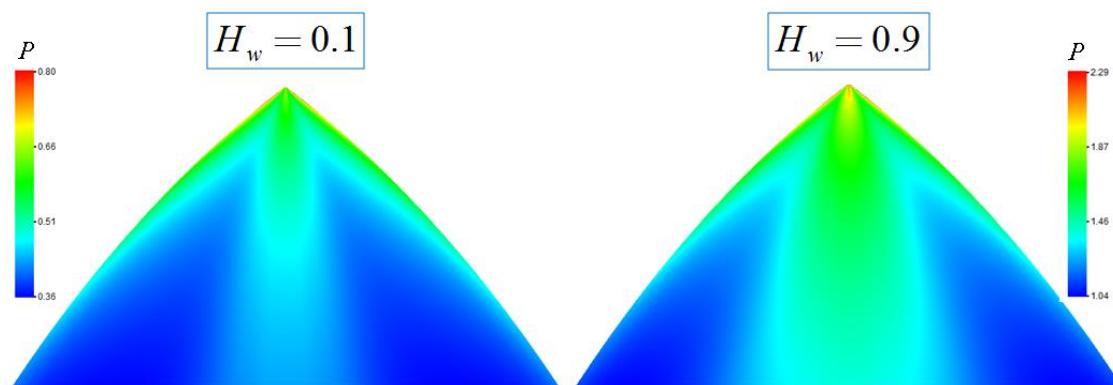


Рис. 13 – Распределение давления на крыле с кромкой  $z_e = \ln(1+x)$

### Заключение

В диссертационной работе сформулирована и решена аналитически и численно для широкого класса определяющих параметров важная задача гиперзвуковой аэродинамики - краевая задача о течении в пространственном пограничном слое на плоском крыле с непрямолинейной передней кромкой с учетом сильного вязко-невязкого взаимодействия.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Исследовано влияние определяющих параметров на характеристики течения в пограничном слое на крыле с изломом передней кромки: угла стреловидности; угла скольжения; температурного фактора; показателя адиабаты; числа Прандтля и показателя степени для коэффициента вязкости. Определены локальные области повышенного поверхностного трения и тепловых потоков вблизи точки излома в направлении набегающего потока. Установлено увеличение давления и уменьшение толщины вытеснения в 2 раза при изменении угла скольжения от  $15^\circ$  до  $55^\circ$ .

2. Построены асимптотические решения в виде координатных разложений для функций течения вблизи плоскости симметрии плоского крыла с кромками обратной стреловидности. Обнаружено, что при заданных параметрах ( $\gamma = 1.4$ ,  $H_w = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $\Theta = 135^\circ$  и  $\Theta = 45^\circ$ ) возможно существование нескольких решений уравнений пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии. Построены асимптотические разложения функций для течения в окрестности передних кромок до четвертого порядка и решена задача на собственные числа. Полученные значения собственного числа оказываются в диапазоне  $2 < \alpha < 5$  для параметров  $\Theta = 15^\circ \dots 165^\circ$ ,  $H_w = 0.0 \dots 1.0$ . Для нахождения однозначного решения выполнено сопряжение с решениями в окрестности передних кромок.

3. Выведено интегральное соотношение в цилиндрической системе координат для определения скорости распространения возмущений давления на плоских крыльях с изломом по передней кромке. Получены диаграммы направленности скоростей распространения возмущений. При помощи интегрального соотношения установлено, что увеличение температуры поверхности от  $H_w = 0.1$  до  $0.9$  может привести к увеличению скорости распространения вверх по потоку на порядок. Массообмен оказывает заметные изменения на скорость распространения только в направлении набегающего потока. Показано, что отсос на передних кромках оказывает значительное влияние на всю картину течения, а влияние отсоса в центральной части крыла несущественно.

4. Сформулирована и численно решена краевая задача о течении в трехмерном пограничном слое на крыльях с непрямолинейными передними кромками. Разработан метод решения полученных уравнений. Показано, что переменная стреловидность приводит к образованию области повышенного давления в плоскости симметрии крыла при рассмотренных параметрах ( $H_w = 0.5$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $\gamma = 1.4$ ).

## Публикации автора по теме диссертации

*Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК:*

1. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Течение в окрестности точки излома передней кромки тонкого крыла на режиме сильного взаимодействия // Учёные записки ЦАГИ, 2011, Т. XLII, №2, С. 11-25.
2. Дудин Г.Н., Ледовский А.В., Со Я.Н. Распространение возмущений в гиперзвуковом пограничном слое в окрестности точки излома передней кромки крыла // Труды МФТИ, 2013, Том 5, № 2, С. 32-45.
3. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Влияние массообмена на распространение возмущений на крыле с изломом передней кромки в гиперзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV, №3, С. 30-44.
4. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Особенности течения в гиперзвуковом пограничном слое в окрестности плоскости симметрии плоского крыла с изломом по передней кромке // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2019, № 4, С. 33–41.
5. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Асимптотические решения уравнений гиперзвукового пограничного слоя на плоском крыле с изломом по передней кромке // Ученые записки ЦАГИ, 2020, Т. LI, № 6, С. 40-50.

*Публикации в прочих изданиях:*

5. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. О влиянии температуры поверхности на течение в области изменений угла стреловидности плоского крыла // Модели и методы аэродинамики. Материалы Десятой Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2010, С. 63-65.
6. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Гиперзвуковой пограничный слой на крыльях с переменной стреловидностью передней кромки // Материалы XXII научно-технической конференции по аэродинамике, - пос. Володарского: ЦАГИ, 2011, С. 61.
7. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Влияние температурного фактора на скорость распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Модели и методы аэродинамики. Материалы Одиннадцатой Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2011, С. 74-75.
8. Dudin G.N., Ledovskiy A.V. Hypersonic boundary layer in the vicinity of a point of inflection of leading edge on a flat wing in the regime of strong viscous interaction // 4th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), St. Petersburg, 4-8 July 2011.

9. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. О распространении возмущений в сверхзвуковом пограничном слое на крыле с изломом передней кромки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4, Часть 3, С. 756-758.
10. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Влияние массообмена на распространение возмущений давления в пограничном слое на крыле на режиме сильного взаимодействия // Модели и методы аэродинамики. Материалы Двенадцатой Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2012, С. 77-79.
11. Dudin G.N., Ledovskiy A.V. On propagation of pressure disturbances in the boundary layer on a flat wing in hypersonic flow // XVI International conference on the methods of aerophysical research. Abstracts. Part 1, Kazan, 2012, p. 73-74.
12. Дудин Г.Н., Ледовский А.В. Распространение возмущений давления в пограничном слое при наличии массообмена на плоском треугольном крыле // Материалы XXIV научно-технической конференции по аэродинамике, - Москва: ЦАГИ, 2013, С. 121.
13. Dudin G.N., Ledovskiy A.V. Propagation of disturbances in hypersonic boundary layer on wing with mass transfer through the surface // 5th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), Munich, Germany, 1-5 July 2013. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/eucass/201305379>
14. Ледовский А.В. Задача вязко-невязкого взаимодействия при обтекании тонких крыльев сверхзвуковым потоком // Материалы XXV научно-технической конференции по аэродинамике, - Москва: ЦАГИ, 2014, С. 166.
15. Ледовский А.В. Тонкие крылья в сверхзвуковом потоке с учетом вязко-невязкого взаимодействия // Модели и методы аэродинамики. Материалы Четырнадцатой международной школы-семинара. – М.:МЦНМО, 2014, С. 95-96.
16. Ледовский А.В. Асимптотические подходы к решению уравнений гиперзвукового пограничного слоя на тонком крыле // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Второе издание: переработанное и дополненное / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2020. [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020\\_2/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/index.htm)